## Л 7. Понятие функции одной переменной. Предел последовательности и функции. Теоремы о пределах функций. Понятия непрерывности функций. Точки разрыва функции

**Определение.** Множеством называется совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы. Объекты, входящие в данное множество, будем называть элементами множества.

Запись $a \in A$ означает, что объект $a$ есть элемент множества $A$ (принадлежит множеству $A$); в противном случае пишут $a \overline{\in} A$ (или $a \notin A$). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. Запись $A \subset B$ ($A$ содержится в $B$) означает, что каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$, в этом случае множество $A$ называется подмножеством множества $B$. Множества $A$ и $B$ называются равными $(A = B)$, если $A \subset B$ и $B \subset A$, другими словами, множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

**Символика математической логики.** Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять некоторые основные логические символы, или кванторы. Пусть α и β некоторые предложения.

1) Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «из $\alpha$ следует β», «⇒» символ импликации.

2) Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает «α и β эквивалентны» т.е. что, из $\alpha \Rightarrow \beta$ и из $\beta \Rightarrow a$. «⇔» – символ эквивалентности.

Любую теорему в математике можно записать в виде $\alpha \Rightarrow \beta$ или в виде $\alpha \Leftrightarrow \beta$, $\alpha$ – условия теоремы, а β – ее утверждение.

3) Знак «∀» означает: «каждый, любой, для каждого» и т. д. ∀ – квантор общности. Например, $\forall x \in X \quad \alpha(x)$ означает: «для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$».

4) Знак «∃» означает «существует, найдется, имеется». «∃» – квантор существования. ∃ - перевернутая $E$ - начальная буква слова «Existenz» - «существует». Например, $\exists x \in X \quad \alpha(x)$ означает: существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$. Если элемент $x$ из $X$, для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единствен, то пишут: $\exists x \in X \quad \alpha(x)$.

**Отрезок, интервал, ограниченное множество**. Введем следующие обозначения для подмножеств в $R$.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, называется отрезком (с концами $a,b$) или сегментом и обозначается так:

$[a,b]$, т.е. $[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется интервалом (с концами $a,b$) или открытом отрезком и обозначается так: $a,b$, т.е. $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$, обозначаются соответственно $[a,b)$, $(a,b]$ и называются полуоткрытыми отрезками или полуинтервалами. Первый, например, закрыт слева и открыт справа.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются числовыми промежутками или просто промежутками.

Произвольный интервал $(a,b)$, содержащий точку $x_0$ мы будем называть окрестностью точки $x_0$. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ называют $\varepsilon$ - окрестность ю точки $x_0$

$$U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

Часто рассматривают множества, называемые бесконечными интервалами или полуинтервалами: 1) $(-\infty,+\infty)$, 2)$(-\infty,a]$, 3)$(-\infty,a)$, 4)$(a,+\infty)$, 5)$[a,+\infty)$.

Первые их них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая), остальные состоят их всех чисел, для которых соответственно: 2) $x\le a$, 3) $x<a$, 4) $a<x$, 5) $a\le x$.

Если $a$ и $b$ конечны и $a<b$, то число $b-a$ называется длиной сегмента $[a,b]$ или интервала $(a,b)$, или полуинтервала $(a,b]$, $[a,b)$.

Пусть $X$ есть произвольное множество действительных чисел.

Говорят, что множество $X$ ограничено сверху, если $\exists$ (действительное), число $M$ такое, что $\forall x\in X: x\le M$.

Ограничено снизу, если $\exists$ число т такое, что $\forall x\in X: x\ge m$.

Ограничено, если оно ограничено как сверху, так и снизу. В противном случае, оно называется неограниченным.

Ясно, что множество $X$ ограничено, если $\exists M>0: \forall x\in X \Rightarrow |x|\le M$, так как $(|x|\le M)\Leftrightarrow(-M\le x\le M)$.

Неограниченное множество $X$ можно определить так: множество $X$ неограниченно $\Leftrightarrow \forall M>0, \exists x_0\in X: |x_0|>M$.

Область значений переменной величины. Множество всех значений переменной величины составляет ее область значений. Областью значений переменной часто бывает интервал.

**Последовательности.** Предположим, что все значения, принимаемые переменной величиной $x$, можно пронумеровать с помощью всевозможных натуральных (целых положительных) чисел: $x_1, x_2,...,x_n,...$ причем значение с большим номером принимается после значения с меньшим номером: если $n<m$, то значение $x_n$ предшествует значению $x_m$, в частности $x_n$ предшествует $x_{n+1}$. В этом случае говорят, что переменная $x$ пробегает последовательность значений $x_1, x_2,...,x_n,...$ или что имеется последовательность (или числовая последовательность). Числа $x_1, x_2,...,x_n,...$ называются членами последовательности: $x_1$ - первый член, $x_2$, - второй и т.д. Число $x_n$ с произвольным номером $n$ называется общим членом последовательности. Последовательность определена, если мы знаем закон, по которому для любого номера $n$ образован соответствующий член $x_n$

последовательности. Иными словами, если мы знаем закон зависимости общего члена $x_n$ от его номера $n$. Последовательность часто обозначают $\{x_n\}$ $(n=1,2,...)$.

**Определение.** Функцией $f$ с областью определения $D$ и областью значений $E$ называется некоторое отображение из $D$ в $E$, т. е. соответствие, при котором каждому элементу $x \in D$ сопоставляется единственный элемент $y = f(x) \in E$.

Для того чтобы функция была определена, надо знать: а) область определения; б) закон соответствия. Обычно функция задается аналитически - какой-нибудь формулой. Иногда закон соответствия задается разными формулами на разных участках ее области определения.

**Возрастание и убывание функций на интервале.** Функция $f(x)$ называется возрастающей на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента, взятых на этом интервале, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция $f(x)$ называется убывающей на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента, взятых на этом интервале, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Запишем эти определения с помощью логических символов - кванторов: для интервала $[a,b]$ $\forall x_1 x_2 \in [a,b]$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ - условие возрастания; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ - условие убывания.

Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется интервалом монотонности этой функции, а про функцию говорят, что она монотонна на этом интервале.

**Четные и нечетные функции.** Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения $D$. Функция $y = f(x)$ называется четной, если выполняется условие

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

функция $f(x)$ называется нечетной, если

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$$

**Период. Периодические функции.** Число $l \neq 0$ называется периодом функции $f(x)$ с областью определения $D$, если

$$f(x+l) = f(x) \quad \forall x \in D$$

Функция $f(x)$, обладающая периодом, называется периодической. Условие предполагает, конечно, что наряду с любым $x \in D$ и $x + l \in D$.

**Сложная функция (функция от функции).** Пусть дана функция $y = f(x)$ от аргумента $x$, причем аргумент $x$, в свою очередь, является функцией от независимой переменной $t$: $y = f(x)$.

Возьмем какое-либо значение $t$. В силу функциональной зависимости $x$ от $t$ этому значению $t$ отвечает определенное значение $x: x = \varphi(t)$. Полученному значению $x$, в свою очередь, отвечает определенное значение $y$: $y = f(x)$.

Получаем $y=F(t)=f(\varphi(t))$. Функция $F(t)$ называется сложной функцией от независимой переменной $t$ или функцией от функции (функция $f$ от функции $\varphi$). При этом функция $y=f(x)$ называется заданной или внешней функцией, а $x=\varphi(t)$- промежуточным аргументом. Функции $f$ и $\varphi$ называют еще составляющими для сложной функции $F$; говорят также, что $F$ является суперпозицией функций $f$ и $\varphi$. Чтобы образовать функцию от функции, нужно, чтобы область значений промежуточной переменной $x=\varphi(t)$ «укладывалась» в область определения заданной функции $y=f(x)$. В противном случае среди значений функции $x=\varphi(t)$ будут и такие, от которых значение функции $f(x)$ образовать нельзя. В таких случаях сложную функцию (или функцию от функции) можно задать только для тех значений независимой переменной $t$, для которых значения промежуточной переменной $x=\varphi(t)$ попадают в область определения внешней функции $y=f(x)$.

**Обратная функция.** Пусть на некотором интервале $X$ задана функция $y=f(x)$, область значений которой обозначим $Y$. Согласно определению функции каждому значению $x\in X$ соответствует определенное значение $y=f(x)$, $y\in Y$. Если же интервал $X$ является интервалом монотонности для $f(x)$, то и каждому значению $y\in Y$ отвечает одно вполне определенное значение $x\in X$, для которого $y=f(x)$ (рис. 20). Таким образом, в этом случае функциональная зависимость между $X$ и $Y$ может рассматриваться и как функция $x=\varphi(y)$, т.е. $y$ можно рассматривать как аргумент, а $x$ - как функцию. У функции $x=\varphi(y)$ областью определения является $Y$, а областью значений - $X$. Функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ называются взаимно обратными. $x=\varphi(y)$ обратная функция к функции $y=f(x)$; $y=f(x)$ - обратная функция к функции $x=\varphi(y)$. Уравнение $x=\varphi(y)$ получается в результате разрешения, если это возможно, уравнения $y=f(x)$ относительно переменной $x$.

Если $f$ и $\varphi$ - взаимно обратные функции, то имеют место тождества

$$f(\varphi(y))\equiv y;\ \ \varphi(f(x))\equiv x.$$

Графиком функции $x=\varphi(y)$ является та же линия, которая изображала функцию $y=f(x)$: ведь уравнение $x=\varphi(y)$ - просто иначе переписанное уравнение $y=f(x)$.

**Неявные функции.** Иногда функциональная зависимость величин $y$ и $x$ задается некоторым уравнением, связывающим $x$ и $y$, но нерешенным ни относительно $y$, ни относительно $x$ т.е. $F(x,y)=0$.

**Параметрическое задание функции.** Кривые на плоскости часто задаются параметрическими уравнениями. В этих уравнениях координаты $x$ и $y$ точки на кривой выражены как функции третьего, вспомогательного переменного $t$ (параметра), как правило $t\in R$.

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases}$$

Это новый, иногда наиболее удобный, способ задать функциональную зависимость между $x$ и $y$. Считаем, что функция $x=\varphi(y)$ имеет обратную $t=\hat{O}(x)$. [т.е. решаем уравнение $x=\varphi(y)$ относительно $t$]. Поставив это во второе уравнение, получим:

$$y=\phi(\hat{O}(x))=f(x)$$

т.е. $y$ есть функция от $x$ (сложная функция).

Переменная величина $x$ стремится к пределу $a$ ($a$- постоянное число), если абсолютная величина $|x-a|$ разности между x и a становится в процессе изменения переменной величины сколь угодно малой.

То же самое определение можно сказать и другими словами.

## Пределы

**Определение.** Постоянное число a называется **пределом переменной величины** $x$, если $|x-a|$ - абсолютная величина разности между $x$ и $a$ становится в процессе изменения переменной величины x сколь угодно малой.

Тот факт, что число $a$, является пределом переменной величины, записывается следующим образом $a=\lim x$ ($\lim$ - первые буквы слова limes - предел) или $x\to a$.

Уточним, что следует понимать под словами «величина $|x-a|$ становится сколь угодно малой», имеющимися в определении предела. Зададимся произвольным положительным числом $\varepsilon(\varepsilon>0)$, тогда, если, начиная с некоторого момента в изменении переменной величины $x$, значения $|x-a|$ сделаются, и будут становиться меньше, чем это $\varepsilon:|x-a|<\varepsilon$.

Переменная величина $x$ стремится к пределу $a$, если для любого положительного $\varepsilon$. начиная с некоторого момента в изменении переменной $x$, выполняется неравенство $|x-a|<\varepsilon$.

Определение предела имеет простой геометрический смысл: неравенство $|x-a|<\varepsilon$ означает, что $x$ находится в $\varepsilon$ - окрестности точки $a$, т.е. в интервале $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Таким образом, определение предела в геометрической форме: число $a$ является пределом переменной величины $x$, если для любой (произвольно малой) $\varepsilon$ - окрестности точки $a$ можно указать такой момент в изменении переменной $x$ начиная с которого все ее значения попадают в указанную $\varepsilon$ - окрестность точки a.

**Определение. Числовой последовательностью** называется действительная функция натурального аргумента, т. е. функция, у которой $D=N$ и $E\subset R$.

Она обозначается символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $n\in N$, или короче, $\{x_n\}$. Число $x_n$, зависящее от $n$, называется $n$-ым членом последовательности. Расставив значения последовательности по порядку номеров, получаем, что последовательность можно отождествить со счетным набором действительных чисел, т. е. $\{x_n\}=\{x_1,x_2,x_3,...\}=\{x_n: n\in N\}$.

**Определение.** Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $n_0$, что все числа $x_n$, у которых $n \ge n_0$, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Соответствующее обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) : (\forall n \ge n_0) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ можно также записывать в виде $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ или $x_n \in U_z(a)$. В этих записях подчеркнуто, что величина $x_n$ становится сколь угодно мало отличимой от $a$, когда номер члена $n$ неограниченно возрастает. Геометрически определение предела последовательности означает следующее: для сколь угодно малой $\varepsilon$-окрестности числа $a$ найдется такой номер $N$, что все члены последовательности с большими, чем $N$, номерами попадают в эту окрестность, вне окрестности оказывается лишь конечное число начальных членов последовательности. Это все или некоторые из членов $x_1, x_2, ..., x_N$. Число $N$ в нашем определении зависит от $\varepsilon : N = N(\varepsilon)$. Как говорилось ранее, определение предела следует понимать в развитии, в динамике, в движении: если мы возьмем другое, меньшее значение для $\varepsilon$, например $\varepsilon_1 < \varepsilon$ то найдется, вообще говоря, другой номер $N_x > N$, такой, что неравенство $|x_n - a| < \varepsilon_1$, выполняется при всех $n > N_1$. Будем записывать определение предела с помощью логических символов (кванторов). Определение предела последовательности с помощью кванторов выглядит так:

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow (\forall \underset{n\to\infty}{\varepsilon > 0})(\exists N) = N(\varepsilon) :\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Дадим определения пределов функции при

$$x \to a,\ \ x \to a-,\ \ x \to a+,\ \ x \to +\infty,\ \ x \to -\infty,\ \ x \to \infty.$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a$, кроме, быть может, этой точки.

**Определение.** Число $A$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U_\xi(a) \setminus \{a\}$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta) > 0 : (\forall x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

( Обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $(x \to a)$.

**Определение**. Число А называется пределом слева функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x \in (a - \delta, a)) \Rightarrow |f(x) - A| < \delta$. ( Обозначается $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$ или $f(a - 0) = A$ ).

**Определение**. Число А называется пределом справа функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если $(\forall \varepsilon > 0\ )(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a + \delta)) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$ или $f(a + 0) = A$ ).

**Теорема.** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют пределы $\lim\limits_{x\to a-} f(x), \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, и они равны между собой.

**Определение.** Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для каждого ε>0 найдётся такое число N, что при любом $x > N$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N):(\forall\, x > N) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. (Обозначается $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$).

**Определение.** Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : (\forall x : x < -N) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)$. (Обозначается $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A)$.

**Определение.** Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N):(\forall x : |x| > N) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)$. (Обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$).

Последнее определение подразумевает, что $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(N,+\infty)$, пятое определение подразумевает, что она определена в интервале $(-\infty, -N)$, а из шестого определения следует, что она определена при $x > N$ и $x < -N$, т. е. в промежутках $(-\infty,-N) \cup (N,+\infty)$.

**Теорема.** Предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ и они равны между собой.

**Свойства функций и последовательностей, имеющих предел.** Рассматриваемые ниже свойства справедливы для всех видов пределов функций и пределов последовательности. Однако для краткости будем формулировать их для одного предела (при $x \to a$).

1) Предел постоянной функции (или последовательности) равен этой постоянной, т.е.

$$\lim_{x\to a} C = C.$$

2) Если предел функции (последовательности) существует, то он единствен.

**Определение.** Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху в промежутке Δ, если найдется такое число $C$, что для всех $x$, принадлежащих Δ, $f(x) \le C$. Если $f(x) \ge C \forall x \in \Delta$, то такая функция называется ограниченной снизу в Δ.

Функция, ограниченная сверху и снизу в Δ, называется ограниченной в Δ. Если Δ не упоминается, то подразумевается, что $\Delta = R$.

**Определение.** Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной (сверху, снизу), если найдётся такое $C$, что для всех $n \in N$, $-C \le x_n \le C$, (или $x_n \le C$, или $x_n \ge -C$).

**Определение.** Функция $y = f(x)$ называется неубывающей (возрастающей) в интервале (a, b), если для любых $x_1 < x_2$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. Если $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$, имеет место $f(x_1) \ge f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, то такая функция называется невозрастающей (убывающей) в $(a, b)$. Такие функции называют монотонными на $(a; b)$.

**Определение**. Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если для любых $n_1 < n_2, n_1, n_2 \in N$ выполняется $x_{n_1} \le x_{n_2}$ $(x_{n_1} \ge x_{n_2})$.

**Теорема**. Пусть функция монотонно возрастает (убывает) на интервале $(a, b)$ и ограничена сверху (снизу) на этом интервале числом $C$, тогда существует

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = C \quad \left( \lim_{x \to a+0} f(x) = A \right) \text{ и } \quad A \le C (A \ge C) \ .$$

Здесь число $b$ может быть равным $+\infty$, тогда рассматривается $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то существует $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = A$ и число $C$, что $A \le C$ $(A \ge C)$.

Аналогичное утверждение можно сформулировать для $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

**Теорема**. Пусть в некоторой окрестности точки $a$, кроме этой точки, для функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ выполняется соотношение $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и пусть пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ существуют и равны между собой, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ также существует и равен $A$.

**Определение.** Функция $y = \alpha(x)$ называется **бесконечно малой** (б.м.) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ или $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$.

**Теорема 1.** Пусть $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x)$ - б.м. при $x \to a$, тогда их сумма $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \cdots + \alpha_n(x)$, также является б.м. при $x \to a$.

**Теорема 2.** Пусть $\alpha(x)$ б.м. при $x \to a$, а $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки а, тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ является б.м. при $x \to a$.

**Теорема 3.** Предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ равен числу $A$ в том и только в том случае, когда $(f(x) - A)$ является б.м. при $x \to a$.

**Основные теоремы о пределах.** Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции, для которых существуют пределы при $x \to a$ (или при $x \to \infty$): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. Сформулируем основные теоремы о пределах.

1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Предел алгебраической суммы, то тогда $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x))$ существует и равен $A \pm B$.

3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ существуют, то тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ существует и равен $A\cdot B$.

4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ и $B\neq 0$ существуют, то тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен $\dfrac{A}{B}$.

**Первый замечательный предел. Второй замечательный предел**

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

**Доказательство.** Пусть $x\to 0+$ и $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим круг единичного радиуса с центральным углом $<AOB=x$. Из рис. 34 непосредственно видно: $OA=OB=1, BC=\mathrm{tg}x$. $S_{\Delta AOB}<S$ сектора $AOB<S_{\Delta OB}$.

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx\Rightarrow \sin x<x<tgx\Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}\Rightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x\Rightarrow \left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\to 0$$

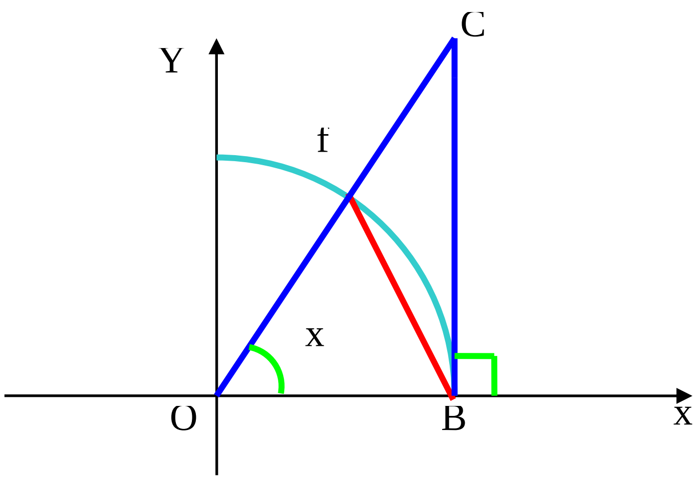
$$1-\frac{\sin x}{x}=\alpha(x)\Rightarrow \frac{\sin x}{x}=1-\alpha(x)\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Так как функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ чётная, то

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\left|-x=y\right|=\lim_{y\to 0+}\frac{\sin y}{y}=1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1.$$

**Пример.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 2x}{1\cdot 3x}=\frac{2}{3}$$




Следствия из первого замечательного предела: а) $\lim\limits_{x\to 0} tg=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0} arc\sin x=1$.

**Второй замечательный предел**

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e, \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad \text{в) } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Здесь e ≈ 2,718282… – иррациональное число. Эта последовательность $\{x_n\}$ обладает двумя свойствами:

а) Она монотонно возрастает, так как в $x_{n+1}$ на одно слагаемое больше, и каждое слагаемое в $x_{n+1}$ больше соответствующего слагаемого в $\{x_n\}$.

б) $$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}<3,$$ т.е. $x_n$ ограничена сверху числом 3. Следовательно, по свойству 4 пределов $2<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<3$.

**Пример.** Вычислим предел, следствия из первого замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x+3}-1\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1-2x-3}{2x+3}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x+3}(3x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-4}{2x+3}}=e^{-3}.$$

**Непрерывность. Сравнение функций. Вычисление пределов функций**

**Определение.** Функция $y=F(x)$ называется бесконечно большой (б.б.) при x →a, если

$$(\forall N>0)(\exists\delta>0):(\forall x\in U_\delta(a)\setminus\{a\})\Rightarrow |F(x)|\geq N.$$

Это обозначается символом $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\infty$ или $F(x)\to\infty\ (x\to a)$, хотя предел этой функций при $x\to a$ не существует.

Отметим следующие свойства б.б. функций.

1) Сумма двух б.б. одного знака при $x\to a$ является б.б. при $x\to a$.

2) Сумма б.б. функции при $x\to a$ и ограниченной в окрестности точки a функции является б.б. при $x\to a$.

3) Если $y=F(x)$ б.б. при $x\to a$, а $|g(x)|\geq C>0$ в некоторой окрестности точки a, то функция $y=F(x)\cdot g(x)$ является б. б. при $x\to a$. В частности, произведение двух б.б. и произведение б. б. на функцию, имеющую ненулевой предел, является б.б.

4) Если $y=F(x)$ б.б. при $x\to a$, то $y=\dfrac{1}{F(x)}$ б.м. при $x\to a$.

5) Если $y=\alpha(x)$ б.м. при $x\to a$ и $\alpha(x)\neq 0$ при $\forall x\in\dfrac{U_\delta(a)}{\{a\}}$, то $y=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является б.б. при $x\to a$.

**Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших**

**Определение.** Бесконечно малая $y=\alpha(x)$ называется б.м высшего порядка малости по сравнению с б.м. $y=\beta(x)$ при $x\to a$ в случае, если найдётся б.м $y=\gamma(x)$ при $x\to a$ такая, что $\alpha(x)=\beta(x)\cdot\gamma(x)$. Соответствующее обозначение $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

**Определение.** Бесконечно малые $y=\alpha(x)$ и $y=\beta(x)$ при $x\to a$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Обозначение $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Подобное определение даётся и для б.б. функции.

Это отношение эквивалентности удовлетворяет трём свойствам

1. $\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
2. $\alpha(x)\sim\beta(x)\Rightarrow(\beta(x)\sim\alpha(x))$;
3. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$ и $\beta(x)\sim y(x)$, то $\alpha(x)\sim y(x)$.

**Теорема.** Из $\alpha(x)\sim\beta(x)$ следует, что $\alpha(x)\sim\beta(x)=o(\beta(x))$

**Теорема.** Пусть $\alpha(x)$ есть б.м при $x\to a$, тогда:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ | 5 | $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$ |
| 2 | $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$ | 6 | $b^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln b, \quad (b>0)$ |
| 3 | $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ | 7 | $(1+\alpha(x))^a-1\sim a\cdot\alpha(x)$ |
| 4 | $arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$ | | |

## Непрерывность функции

**Определение.** Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если выполняются три условия:

1) существует $f(x_0)$; 2) существует $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

В символической форме это определение записывается так:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):(\forall x\in U_\delta(x))\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$ слева (справа), если выполняются три условия:

1) $\exists\ f(x_0)$;

2) $\exists\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)\ \left(\text{или}\ \lim\limits_{x\to x_0+}f(x)\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$ при $\left(\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)\right)$.

Очевидно, что функция является непрерывной в точке $x_0$ в том и только в том случае, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

График непрерывной функции представляет из себя непрерывную линию

**Теорема** (о непрерывности монотонной функции). Пусть функция $y=f(x)$ монотонна (монотонно возрастает или монотонно убывает) на отрезке $[a, b]$ и принимает все значения из отрезка $[f(a),f(b)]$, тогда она непрерывна в каждой точке интервала $(a, b)$, непрерывна в точке $a$ справа и в точке $b$ слева.

**Теорема.** Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке $x_0$. Тогда функции

1) $y = f(x) \pm g(x)$
2) $y = f(x) \cdot g(x)$,
3) при $g(x_0) \neq 0$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. также непрерывны в точке $x_0$.

**Теорема (непрерывность сложной функции).** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и $u_0 = f(x_0)$, а функция $z = g(u)$ непрерывна в точке $u_0$. Тогда сложная функция $z = g(f(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

**Определение.** Точка $x_0$, в которой нарушается хотя бы одно условие непрерывности функции $y = f(x)$, называется точкой разрыва этой функции.

Рассмотрим точку разрыва $x_0$ функции $y = f(x)$, в некоторой окрестности которой (кроме быть может $x_0$) эта функция определена. Возможны три случая:

1. Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $f(x_0)$ не определена или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то $x_0$ называется точкой устранимого разрыва. Если эту функцию изменить в точке $x_0$, т.е. положить

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0, \end{cases}$$

то функция $y = \tilde{f}(x)$ будет непрерывной в точке $x_0$, т. е. этот разрыв устраняется.

2. Если $\exists \lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$.

3. Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ не существует или равен бесконечности, то точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

**Определение.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех точках интервала $(a, b)$, непрерывна в точке a справа и в точке $b$ слева.

Обозначение $f(x) \in C[a, b]$.

**Первая теорема Больцано-Коши.** Пусть $f(x) \in C[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков (т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$), тогда найдется по крайней мере одна точка c в интервале $(a, b)$ такая, что $f(c) = 0$

Это даёт алгоритм приближенного решения уравнения $f(x) = 0$, который называется методом половинного деления.

**Вторая теорема Больцано-Коши.** Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $D \in (A, B)$ ($[A, B]$), тогда $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = D$. Эту теорему можно сформулировать и так: непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.

**Первая теорема Вейерштрасса.** Если $f(x) \in C[a,b]$., то она ограничена на этом отрезке, т. е. $\exists M : |f(x)| \le M,\ x \in [a,b]$.

**Определение.** Наибольшим значением функции $y = f(x)$ в промежутке $\Delta$ называется такое значение $f(x_0)$, $x_0 \in \Delta$, при котором $f(x_0) \ge f(x)$ для всех $x \in \Delta$ (обозначение $\max\limits_{x\in\Delta} f(x)$). Аналогично вводится понятие наименьшего значения функции в $\Delta$(обозначение $\min\limits_{x\in\Delta} f(x)$).

**Вторая теорема Вейерштрасса.** Функция $y = f(x) \in C[a,b]$ достигает в нём своих наибольшего и наименьшего значений.